# Применение эвристических методов и приемов на уроках математики

Лисовская Н.А., учитель математики МБОУ «Лицей №48»

*В статье показаны возможности использования эвристических задач в организации продуктивной деятельности старшеклассников на уроках математики.*

Неуклонное развитие информационных и производственных технологий, растущий объем научной, культурной, социальной и других видов информации предъявляет к человеку новые требования, как в труде, так и в быту. В современном обществе как нельзя востребованы личности, способные ориентироваться в происходящих событиях и явлениях, давать им адекватную оценку, принимать правильные решения в нестандартных ситуациях. Поэтому именно школа должна заложить основы для формирования инициативности, изобретательности, предприимчивости, креативности и многих других качеств личности.

Современные педагогика и психология ориентируют учителя на использование активных методов обучения на уроках математики. Активное обучение характеризуется постоянным включением учащихся в различные виды деятельности, а также созданием благоприятных условий для взаимодействия учителя с учениками и учеников друг с другом. На уроках математики включать учащихся в процесс познания с разной степенью активности позволяет использование **эвристического метода** обучения.

Эвристический метод известен еще со времен Сократа, который при исследовании ряда проблем прибегал к системе наводящих вопросов. Таким образом, он помогал собеседнику самостоятельно приходить к постановке или решению проблемы. Причем истина открывалась подчас не только ученику, но и самому учителю. Беседу относят к наиболее старым методам дидактической работы.

Метод Сократа развивался и совершенствовался в трудах великих педагогов, начиная с Яна Амоса Коменского и заканчивая нашими современниками Хуторским А.В., Фридманом Л.М., Калягиным Ю.М. и многими другими учеными-дидактами.

Одним из эффективных способов обучения, который позволяет учащимся проявить творческую активность в процессе обучения математике, является система эвристических методов и приемов. Наиболее полно они описаны у Хуторского А.В. Формы и методы эвристического обучения направлены на развитие эвристических качеств личности учащихся и имеют в своей основе соответствующие типы заданий.

<u>Задания когнитивного типа:</u>

-решить реальную проблему, которая существует: доказать математическую закономерность, лемму, теорему;

-исследовать объект (число, уравнение, задачу); установить его происхождение, смысл, строение, признаки, функции, связи; применить разные научные подходы к исследованию одного итого же объекта;

-провести математический опыт, эксперимент;

-исследовать исторические факты;

<u>Задания креативного типа:</u>

- предложить ученикам иными способами выполнить задачу или придумать обозначение числа, понятия; дать определение изучаемому объекту, явлению; сформулировать математическую закономерность и т.д.

-сочинить задачу или математическое задание в занимательной, игровой форме, (математическую сказку, математический кроссворд, викторину, составить сборник своих задач);

-изготовить модель, математическую фигуру или другую математическую поделку;

-провести урок в роли учителя, разработать учебные пособия, памятки, алгоритмы решения задач.

<u>Задания оргдеятельностного типа:</u>

-разработать цели собственных занятий по математике на день, на четверть, на год; разработать план домашней, классной или творческой работы по математике;

-составить и провести викторину или урок по математике для младших классов.

Приведу примеры реализации заданий данных типов исходя из опыта своей работы в старших классах.

Задание когнитивного типа рассмотрю на примере ознакомления учащихся с координатно-параметрическим методом решения уравнения с параметром.

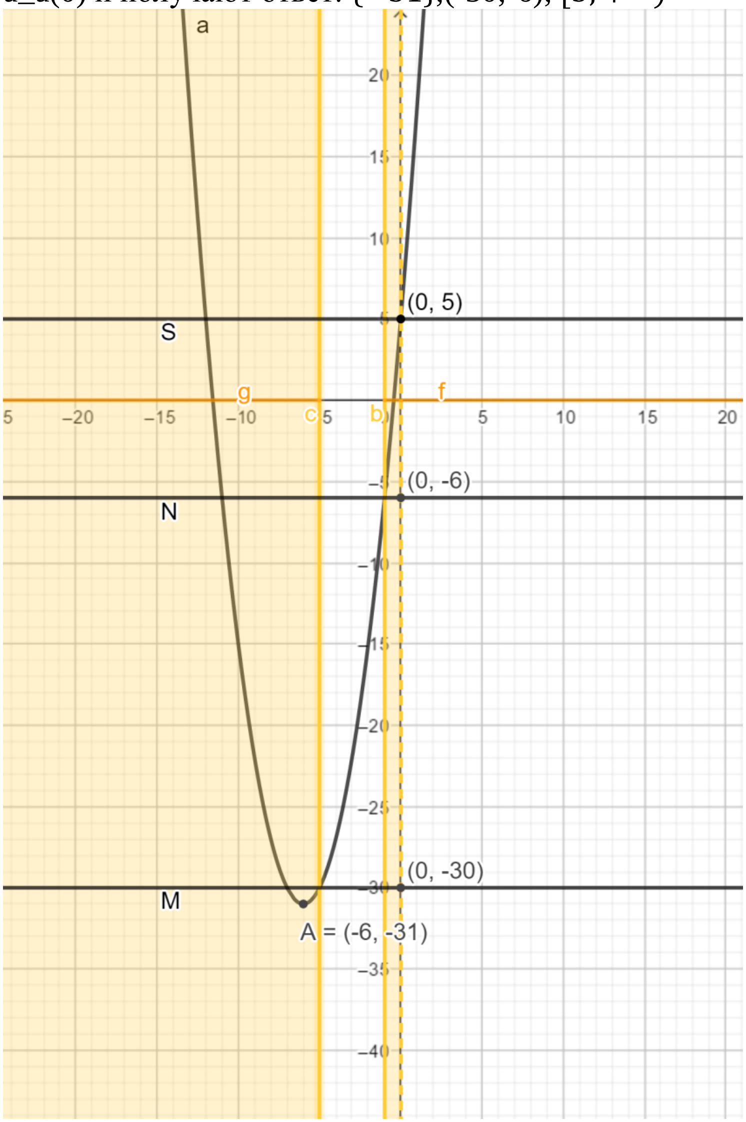
**Задание-1:** Найти значение параметра а, при котором уравнение $\sqrt{x^2+6x+5}=\sqrt{a-6x}$ имеет ровно один отрицательный корень.

Это задание было предложено учащимся после изучения темы «Решение иррациональных уравнений», поэтому они без труда перешли к равносильной системе:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -5]; [-1; +\infty) \\ x^2+12x+5-a=0 \end{cases}$$

Далее следует цепочка эвристических вопросов по управлению мыслительной деятельностью учащихся:

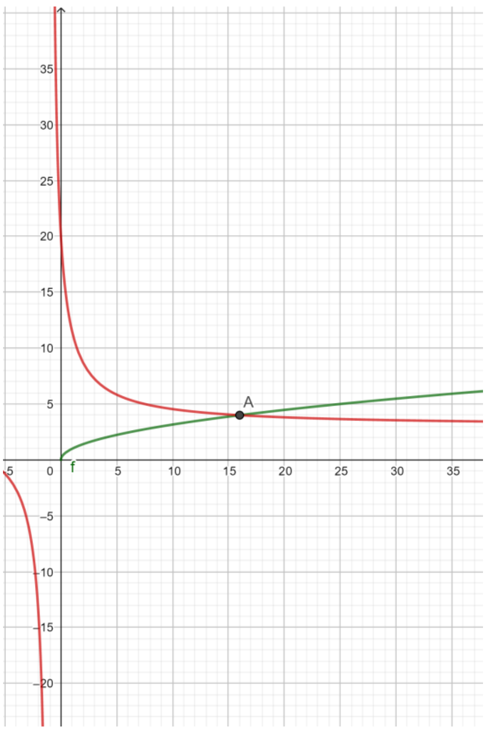
1) Изменилось ли качество уравнения после равносильного преобразования? (Да, вместо иррационального, оно стало квадратным)
2) Сформулируйте вопрос к новой задаче. (Найти а, при котором уравнение имеет ровно один корень на промежутках $(-\infty; -5]$ и$[-1; 0)$)
3) Сколько неизвестных в данном уравнении? Что в таком случае будет решением уравнения? (Упорядоченная пара чисел (x;a))
4) Где можно изобразить упорядоченную пару чисел? Что для этого надо сделать? (В прямоугольной системе координат xOa, для этого одну переменную надо выразить через другую)
5) Сделаем это. (Учащиеся без труда строят параболу а = $x^2+12x+5$) и выделяют ГМТ координатной плоскости, соответствующее неравенствам x≥-1 и x≤-5.
6) Затем, аналитически находят границы значений параметра: a=-31; a(-5)<a<a(-1); a≥a(0) и получают ответ: $\{-31\}$;(-30;-6); $[5; +\infty)$

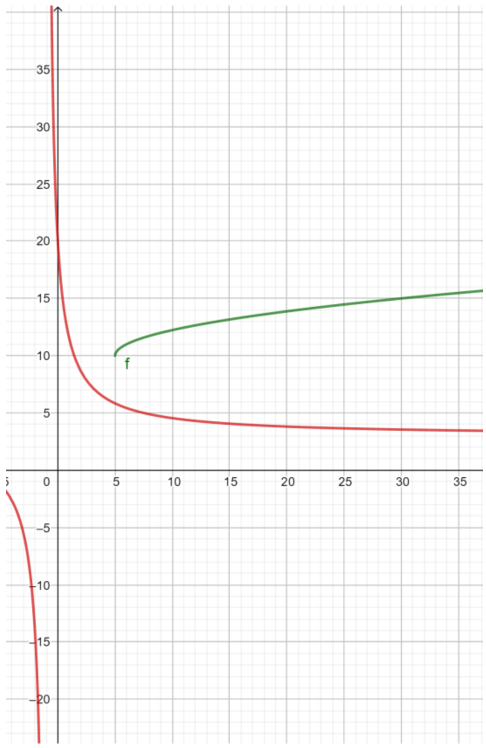


Т.о. в результате решения данной эвристической задачи старшеклассники «открыли» новый метод решения задач с параметром, который в будущем может быть успешно применен для решения других задач, а так же повысили мотивацию к изучению предмета, т.к. рассматриваемая задача является заданием№18 ЕГЭ 2018 года. В качестве домашнего задания была предложена та же задача, только решить ее нужно было другим способом, рассмотрев левую часть уравнения как функцию f(x) и проанализировав положение параболы относительно указанных промежутков.

**Задание-2:** Решить уравнение $\sqrt{x} = \frac{17}{x+1} + 3$

Разумеется решение этого задания несомненно вызовет у школьников затруднения, т.к правая часть уравнения представлена дробно-рациональной функцией. После безуспешных попыток решить данное уравнение традиционными способами, предлагаю учащимся проанализировать графическую иллюстрацию левой и правой частей уравнения, как функций от x.




1) Каков характер монотонности функций, стоящих в левой и правой частях уравнения?
2) Как это связано с количеством корней уравнения?
3) Сформулируйте предположение, используя математическую терминологию.(Если левая и правая части уравнения разные по характеру монотонности функции, то уравнение имеет один корень)
4) Измените уравнение так, чтобы условие вашей теоремы выполнялось, а заключение – нет. (Учащиеся сразу догадываются, что если «передвинуть» график ограниченной функции вверх, то уравнение не будет иметь корней, при этом левая часть уравнения может выглядеть так $\sqrt{x-5}+10$)
5) Теперь изложите формулировку теоремы в новой редакции.( Если левая и правая части уравнения разные по характеру монотонности функции, то уравнение имеет не более одного корня)
6) Далее учителем проводится доказательство «открытой» учащимися теоремы и делаются выводы о том, что необязательно всякий раз прибегать к построению графиков функций, входящих в уравнение. Достаточно обосновать разный характер монотонности функций, входящих в левую и правую части уравнения и попытаться найти его корень подбором.
7) Можно ли утверждать, что если корень отгадать не удалось, то уравнение не имеет корней?
8) Сформулируйте последовательность шагов при использования метода монотонности функций, входящих в уравнение? (обосновать разный характер

монотонности функций, входящих в левую и правую части уравнения и сделать вывод о количестве его корней; найти ОДЗ уравнения; попытаться отгадать корень, взятый из ОДЗ; выполнить проверку)

9) В качестве домашней работы придумайте свои уравнения, которые можно решить этим методом.

В исследованиях последних лет психологи, дидакты и методисты убедительно показали, что умения школьников решать задачи не зависят от количества решенных задач. Если даже ученик решил много задач, но у него не сформирован общий подход к задаче, ее анализу, поиску плана решения, самостоятельно решать задачи он не сможет. Поэтому очень важным является использование на уроках математики заданий креативного типа. К таким заданиям можно отнести формирование умения проводить «развитие задачи», которое помогает ученикам приобретать навыки самостоятельного конструирования новых задач и, решая их, получать субъективно новые знания, то есть стимулировать эвристическую деятельность. Среди способов «развития задачи» можно выделить следующие: преобразование задачи; конструирование задачи, аналогичной данной, но более сложной; обобщение задачи; конкретизация задачи и конструирование задачи, обратной данной.

**Задание-3:** Преобразование задачи.

Решение задач с параметром методом замены переменной приводит учащихся к преобразованию исходной задачи к задаче другого качества. С этой целью полезно организовать работу в группах, предложив выполнить следующее упражнение: произведите замену переменной и сформулируйте новое условие задачи.

| № п/п | Задача | Преобразованная задача |
|---|---|---|
| 1 | Найдите все значения параметра a, при которых уравнение<br>$(a+1)\cdot 4^x + 8\cdot 6^x + (a-5)\cdot 9^x = 0$<br>имеет ровно одно решение. | $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ , $t > 0$<br>Найдите все значения параметра a, при которых уравнение<br>$(a+1)t^2 + 8t + (a-5) = 0$<br>имеет единственный положительный корень. |
| 2 | Найдите все значения параметра a, при которых уравнение<br>$9^{-\|x-2\|} - 4\cdot 3^{-\|x-2\|} - a = 0$<br>имеет хотябы одно решение. | $t = 3^{-\|x-2\|}$, $0 < t \le 1$<br>Найдите все значения параметра a, при которых уравнение<br>$t^2 - 4t - a = 0$<br>Имеет хотябы один корень, принадлежащий промежутку $(0; 1]$ |
| 3 | Найдите все значения параметра a, при которых уравнение<br>$4^x + a\cdot 2^{x+1} + a^2 + a - 2 = 0$<br>имеет два корня разных знаков. | $t = 2^x$, $t > 0$<br>Найдите все значения параметра a, при которых уравнение<br>$t^2 + 2at + a^2 + a - 2 = 0$<br>имеет два положительных корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1. |
| 4 | Найдите все значения параметра p, при которых наименьшее значение функции<br>$y = 4^x - p\cdot 2^{3+x} + 7p^2$ на отрезке $[-2; 0]$ отрицательно. | $t = 2^x$, $\frac{1}{4} \le t \le 1$<br>Найдите все значения параметра p, при которых наименьшее значение функции<br>$f(t) = t^2 - 8pt + 7p^2$ на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ отрицательно. |

**Задание-4:** Конструирование задачи, аналогичной данной, но более сложной.

На уроке повторения и обобщения темы «Показательная и логарифмическая функции» учащимся предлагается, взяв за основу квадратное неравенство $a^2 + 4a - 5 < 0$, сконструировать новое, более сложное задание с помощью промежуточных переменных. При этом необходимо выполнить преобразование условия неравенства так, чтобы ничего в условии не напоминало о квадратном неравенстве. Данное задание выполняется в группах, затем учащиеся обмениваются задачами, решают и обсуждают решение.

| | Промежуточные переменные | Составленное неравенство |
|---|---|---|
| 1 группа | $\sqrt{t}$ ; $\log_5 p$; x+2; | $4\sqrt{\log_5(x+2)} < \log_{0,2}\frac{x+2}{3125}$ |
| 2 группа | $\sqrt{t}$; $5^t$; x+2 | $4(\sqrt{5})^{x+2} < 5 - 0,2^{x+2}$ |

Приведенные примеры эвристических задач показывают, что это лучший способ мгновенно возбудить внимание и познавательный интерес учеников на уроке, а так же, активизировать процесс обучения в условиях ориентации на индивидуальное развитие личности. Однако использование таких задач в обучении математике требует того, чтобы школьники были знакомы с сущностью процесса решения эвристических задач и имели средний или более высокий уровень способностей. Ценность эвристических уроков по математике заключается в том, что учащиеся самостоятельно добывают новые знания, учатся их применять исходя из уже имеющегося опыта, учитель лишь подводит их правильному решению. Эвристическое обучение на уроке математики способствует формированию своей точки зрения, своей позиции, своего математического и не только миропонимания. Этот метод позволяет активизировать мыслительную деятельность учащихся, повысить их интерес к хорошему усвоению материала, к развитию мышления и способностей.